

**Exercice 1 (4 points )**  
**Commun à tous les candidats**

1. a. On a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

La recherche d'un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  conduit à résoudre le système : 
$$\begin{cases} -2 = k \\ 0 = -4k \\ -2 = -k \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, la première ligne et la seconde ligne, par exemple, étant incompatibles.

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont donc pas colinéaires et les points A,B et C ne sont donc pas alignés.

**Ces points définissent un plan.**

b. Les coordonnées de chaque point vérifient l'équation de P.

En effet :  $2x_A + y_A - 2z_A + 4 = 6 + 2 - 12 + 4 = 0$ .

On procède de même pour les points B et C.

**Le plan (ABC) se confond donc avec le plan P**

2. a. On a d'après les calculs du 1.a.:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  car :  $(-2) \times 1 + 0 \times (-4) + (-2) \times (-1) = 0$ .

Les vecteurs sont donc orthogonaux .

**Le triangle ABC est donc rectangle en A.**

b. Un vecteur normal à P est d'après son équation,  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et la droite  $\Delta$  est dirigée par  $\vec{n}$ .

Dire que  $M(x, y, z)$  est un point de  $\Delta$  signifie donc qu'il existe un réel  $t$  tel que :  $\overrightarrow{OM} = t\vec{n}$

Donc :  $M(x, y, z) \in \Delta$  signifie qu'il existe un réel  $t$  tel que 
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$$

c. Par théorème :  $OK = \frac{|2x_0 + y_0 - 2z_0 + 4|}{\|\vec{n}\|} = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}$  c'est-à-dire  $OK = \frac{4}{3}$

d. Le volume  $\mathcal{V}$  du tétraèdre OABC est donné par la formule :  $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$

où :  $\mathcal{B} = \text{Aire} ( ABC ) = \frac{1}{2} AB \times AC$  avec 
$$\begin{cases} AB = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \\ AC = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

et  $h$  désigne la hauteur du tétraèdre, c'est-à-dire :  $h = OK = \frac{4}{3}$

Ainsi :  $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \right) \times \frac{4}{3}$  c'est-à-dire  $\mathcal{V} = \frac{8}{3}$ .

## Correction de l'épreuve du Bac S 2007-Pondichéry -(Sujet Obligatoire)

3. a La somme des coefficients du système est 6. Elle est donc non nulle.

**Le système admet donc un barycentre G.**

b. Le centre de gravité I du triangle ABC est son isobarycentre, donc :  $I = \text{bar} \{(A,1), (B,1), (C,1)\}$ .

Par associativité du barycentre,  $G = \text{bar} \left\{ (O,3), \underbrace{(A,1), (B,1), (C,1)}_{\text{de barycentre I}} \right\} = \text{bar} \{(O,3), (I,3)\}$ .

Le point G est donc isobarycentre des points O et I, c'est-à-dire le milieu de [OI]. Donc  $\boxed{G \in (OI)}$

c. Les coordonnées de I sont :  $\left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{8}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 5 \right)$

D'après la question précédente, G milieu de [OI] a donc pour coordonnées :  $\left( \frac{x_I}{2} = \frac{4}{3}, \frac{y_I}{2} = \frac{1}{3}, \frac{z_I}{2} = \frac{5}{2} \right)$ .

En notant H le projeté orthogonal de G sur P, la distance de G au plan P est :

$$GH = \frac{|2x_G + y_G - 2z_G + 4|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left| 2 \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - 2 \times \frac{5}{2} + 4 \right|}{3} \quad \text{donc : } \boxed{GH = \frac{2}{3}}$$

4. Comme G est le barycentre du système  $\{(O,3), (A,1), (B,1), (C,1)\}$ , pour tout point M de l'espace :

$$3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 6\vec{MG}$$

Donc,  $\Gamma$  est l'ensemble des points M tels que  $\|6\vec{MG}\| = 5$  c'est-à-dire  $\boxed{MG = \frac{5}{6}}$

**$\Gamma$  est donc la sphère de centre G et de rayon  $\frac{5}{6}$ .**

Comme  $\frac{2}{3} < \frac{5}{6}$ , le centre de la sphère est à une distance du plan inférieure à son rayon.

**P et  $\Gamma$  sont donc sécants. Leur intersection est donc un cercle**

# Correction de l'épreuve du Bac S 2007-Pondichéry -( Sujet Obligatoire )

**Exercice 2 ( 5 points )**  
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. Pour  $M \neq \Omega$ ,

$$M' = R(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\text{Donc : } M' = R(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \theta [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta [2\pi] \end{cases}$$

Dire que  $M' = R(M)$  signifie donc que le complexe  $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$  a pour module 1 et pour argument  $\theta$

c'est-à-dire  $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$  qui s'écrit aussi :  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$  (formule encore vraie pour  $M = \Omega$ )

2. a. Avec les notations précédentes,  $M' = R(M)$  se traduit par :  $z' - 2 - 2i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 2 - 2i)$

b. Ainsi :  $A = R(I)$  donne :  $z_A - 2 - 2i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_I - 2 - 2i) \Leftrightarrow z_A = 2 + 2i - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$

$$\text{Donc : } z_A = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}i$$

c. Comme  $A = R(I)$ , on a :  $BI = BA$  et  $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$  donc :  $IAB$  est équilatéral, donc :  $IA = IB$

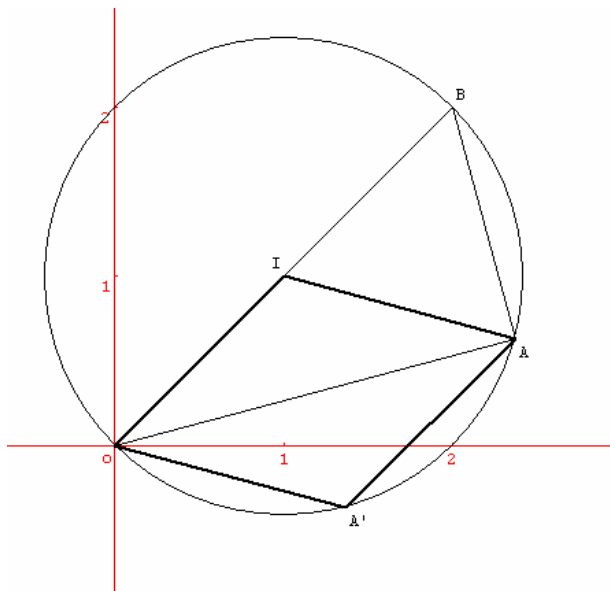
Or:  $IB = |z_B - z_I| = |1 + i| = \sqrt{2}$  et  $IO = |z_I| = |1 + i| = \sqrt{2}$  donc :  $IA = IB = IO = \sqrt{2}$

Les points O, A et B sont donc sur le cercle de centre I et de rayon  $\sqrt{2}$

Comme I est milieu de [OB] car  $z_I = \frac{1}{2} z_B$ ,

le cercle circonscrit au triangle OAB admet le côté [OB] pour diamètre.

**Ce triangle OAB est donc rectangle en A.**



Dans le triangle rectangle OAB, on a :

$$(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

donc le triangle OAB est direct, et par suite :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{donc : } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

Enfin, en remarquant que  $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \arg(z_I) = \frac{\pi}{4}$ , on a :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} [2\pi]$$

## Correction de l'épreuve du Bac S 2007-Pondichéry -( Sujet Obligatoire )

3. Par définition :  $\overline{AA'} = \overline{IO}$  donc :  $z_{A'} - z_A = -z_I$

c'est-à-dire :  $z_{A'} = z_A - z_I = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2}i - 1 - i$

$$\text{Donc : } z_{A'} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

b. Comme  $\overline{AA'} = \overline{IO}$ , OIAA' est un parallélogramme. Or IA = IO donc **OIAA' est un losange.**

c. Dans ce losange, [OA) est bissectrice de  $\widehat{IOA'}$  donc :  $(\overline{OA}, \overline{OA'}) = (\overline{OI}, \overline{OA}) = -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

Par suite :  $(\vec{u}, \overline{OA'}) = (\vec{u}, \overline{OA}) + (\overline{OA}, \overline{OA'}) = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12} \quad [2\pi]$ . **Ainsi, un argument  $z_{A'}$  est  $-\frac{\pi}{12}$ .**

# Correction de l'épreuve du Bac S 2007-Pondichéry -( Sujet Obligatoire )

**Exercice 3 ( 5 points )**  
**Commun à tous les candidats**

1. La fonction  $f$  est le quotient des fonctions  $u : x \mapsto \ln(x+3)$  et  $v : x \mapsto x+3$  dérivables sur  $[0 ; +\infty[$   
 donc  **$f$  est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ .**

•  $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  donne, pour tout réel positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x+3}(x+3) - \ln(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$

Comme  $x \geq 0$ ,  $x + 3 \geq 3 > e$  donc :  $\ln(x + 3) > 1$  donc  $1 - \ln(x + 3) < 0$   
 Par suite :  $f'(x) < 0$  pour tout réel  $x \geq 0$   
 **$f$  est donc strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$**

• Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $X = x + 3 \rightarrow +\infty$

donc  $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

D'où le tableau :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$	0

2. a. Comme  $f$  est strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$  :

**Si  $n \leq x \leq n+1$  Alors :  $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$  c'est-à-dire  $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ .**

b. Par intégration de l'inégalité précédente sur l'intervalle  $[n ; n+1]$  on a :

$$\underbrace{\int_n^{n+1} f(n+1) dx}_{f(n+1)[n+1-n]=f(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \underbrace{\int_n^{n+1} f(n) dx}_{f(n)[n+1-n]=f(n)} \quad \text{c'est-à-dire : } \boxed{f(n+1) \leq u_n \leq f(n)}.$$

c. Comme :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1)$ .

D'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . **La suite  $(u_n)$  est donc convergente vers 0**

3. a.  $F = u^2$  où  $u : x \mapsto \ln(x+3)$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  donc  $F$  est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$

Pour tout réel  $x$  positif,  $F'(x) = 2u(x)u'(x) = 2 \frac{\ln(x+3)}{x+3} = 2 f(x)$

b. Une primitive de  $f$  est donc  $\frac{1}{2}F$  par suite :

$$I_n = \int_0^n f(x) dx = \left[ \frac{1}{2} (\ln(x+3))^2 \right]_0^n = \frac{(\ln(n+3))^2 - (\ln(3))^2}{2}$$

4. Pour  $n$  entier naturel ,

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx = \int_0^n f(x) dx \quad \text{d'après la relation de}$$

Chasles sur les intégrales.

Ainsi :  $S_n = I_n = \frac{(\ln(n+3))^2 - (\ln(3))^2}{2}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+3) = +\infty$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ . **La suite  $(S_n)$  est donc divergente.**

## Correction de l'épreuve du Bac S 2007-Pondichéry -( Sujet Obligatoire )

**Exercice 4 ( 6 points )**  
**Commun à tous les candidats**

1. On reconnaît dans cette expérience un schéma de Bernoulli pour lequel la variable N « nombre de personnes acceptant de répondre » suit donc une loi binomiale de paramètres 50 et 0,1

Ainsi :  $P(A) = P(N > 0) = 1 - P(N = 0) = 1 - 0,9^{50}$       donc, arrondi au millième :  $P(A) \approx 0,995$

De même :

$$P(B) = P(N < 3) = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) = 0,9^{50} + \binom{50}{1} 0,1 \times 0,9^{49} + \binom{50}{2} 0,1^2 \times 0,9^{48}$$

Donc :  $P(B) \approx 0,112$

Enfin :  $C = \bar{B}$  donc  $P(C) = 1 - P(B) \approx 0,888$

2. a. Avec cette loi, la probabilité  $f(a)$  qu'au moins trois personnes répondent est donnée par la formule :

$$f(a) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \frac{e^{-a} a^0}{0!} - \frac{e^{-a} a^1}{1!} - \frac{e^{-a} a^2}{2!}$$

c'est-à-dire  $f(a) = 1 - e^{-a} \left( 1 + a + \frac{a^2}{2} \right)$

b.  $f(5) = 1 - e^{-5} \left( 1 + 5 + \frac{25}{2} \right) \approx 0,875$  ce qui est voisin du résultat trouvé pour P(C).

Dans cette modélisation, les conditions de la question 1. conduisent en effet à poser  $a = \frac{50}{10} = 5$ .

3. Dans cette question, il s'agit de trouver  $n$  pour que  $f(a) \geq 0,95$  c'est-à-dire  $f\left(\frac{n}{10}\right) \geq 0,95$

a. Pour  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = e^{-x} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} \right) - e^{-x} (1 + x) = \frac{e^{-x} x^2}{2}$

Or  $e^{-x} > 0$  donc  $f'(x) \geq 0$  et  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Par suite, **f est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .**

Limite en  $+\infty$  :

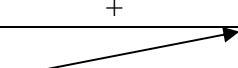
Pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) = 1 - e^{-x} - x e^{-x} - \frac{x^2 e^{-x}}{2}$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  et par le théorème des croissances comparées :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$ ,

on en déduit que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

D'où le tableau :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	1



## Correction de l'épreuve du Bac S 2007-Pondichéry -( Sujet Obligatoire )

**3.b.** La fonction  $f$  étant continue et strictement croissante sur  $I = [0 ; +\infty[$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le tableau précédent on peut affirmer que :

**Lorsque  $x$  décrit  $I$ ,  $f(x)$  décrit l'intervalle  $J = [0 ; 1[$ .**

Comme  $0,95 \in J$ , l'équation  $f(x) = 0,95$  admet au moins une solution  $\alpha$  dans  $I$ .

De plus, la stricte croissance de  $f$  assure l'unicité de  $\alpha$ .

Comme :  $\begin{cases} f(6,29) \approx 0,9498 \\ f(6,30) \approx 0,9502 \end{cases}$ , on a :  $f(6,29) < 0,95 < f(6,30)$ . On en déduit que :  $\boxed{6,29 < \alpha < 6,30}$

**c.** On cherche donc la valeur minimale de  $n$  pour que :  $f\left(\frac{n}{10}\right) \geq 0,95$

c'est-à-dire :  $f\left(\frac{n}{10}\right) \geq f(\alpha)$

ce qui par stricte croissance de  $f$  se traduit par :  $\frac{n}{10} \geq \alpha$  c'est-à-dire :  $n \geq 10\alpha$

**Comme  $62,9 < 10\alpha < 63$ , le nombre minimum de personnes à interroger est 63.**