

## Equation différentielle et méthode d'Euler

### Énoncé

Soit l'équation différentielle :  $y' = -2y$ . On admet que la fonction  $f$  solution de cette équation, définie sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant  $f(0) = 1$  est la fonction  $f$  telle que  $f(x) = \exp(-2x)$ .

On cherche à comparer  $f(1)$  aux valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode d'Euler avec différents pas.

On se place sur l'intervalle  $[0, 1]$  en prenant un pas  $h$  égal à  $\frac{1}{n}$ , où  $n$  est un entier supérieur à 2. On obtient ainsi, dans le plan muni d'un repère, une suite de points notés  $M_k$ , d'abscisse  $x_k$  et d'ordonnée  $y_k$  telles que :

$x_0 = 0, y_0 = 1$ , et pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n}$  et  $y_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) y_k$ .

Pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ ,  $y_k$  est une valeur approchée de  $f(x_k)$ .

- Déterminer l'expression de  $y_k$  en fonction de  $k$  ( $n$  étant une valeur donnée).

Appeler l'examineur pour faire vérifier l'expression obtenue pour  $y_k$ .

- À l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

Valeur de $n$ égale à	$k$	$x_k$	$y_k$
10	0	0	1
Pas égal à	1	0,1	0,8
0,1	2	0,2	
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		

- En déduire une valeur approchée de  $f(1)$ .

Appeler l'examineur et lui présenter le tableau de valeurs construit avec  $n = 10$ . Lui expliquer comment modifier le tableau lorsque  $n = 20$  ou  $n = 30$ .

4. Réitérer la méthode dans les cas  $n = 20$  puis  $n = 30$  et donner les valeurs approchées de  $f(1)$  ainsi obtenues. Sur la copie, recopier et compléter le tableau suivant :

Valeur de $n$ égale à	10	20	30	Valeur approchée de $e^{-2}$
Valeur approchée de $y_n$				

5. À l'aide du tableur, représenter graphiquement dans un repère du plan la suite des points  $M_k$  obtenue à la question 4., dans le cas où  $n$  est égal à 30, ainsi que la fonction solution.

Appeler l'examineur et lui présenter la représentation graphique réalisée.

---

### Production demandée

- Calcul de  $y_k$  en fonction de  $k$  ;
  - Réalisation et visualisation à l'écran de tableaux de valeurs obtenus à l'aide d'un tableur ;
  - Détermination de valeurs approchées de  $f(1)$  (tableau rempli) ;
  - Visualisation à l'écran et si possible impression de la représentation graphique.
-