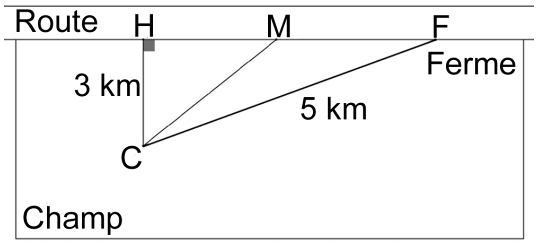
Modélisation d'une situation géométrique

Énoncé

Un agriculteur doit se rendre du point C de son champ à sa ferme F. Il se trouve à 3 kilomètres de la route qui mène à la ferme, et à 5 kilomètres de cette dernière, comme indiqué sur la figure suivante :



On considère que :
* Les points H, M et F sont alignés sur le bord de la route
* $CH = 3; CF = 5$
* La droite (CH) est perpendiculaire à la droite (HF)

On note x la distance HM
Le fermier cherche à économiser sa consommation de carburant. Il sait que sa consommation est :

* d'un litre de carburant par kilomètre parcouru sur la route
* de k litres de carburant par kilomètre parcouru à travers champs (le facteur k, avec $k \geqslant 1$, dépend de l'état du terrain : plus le terrain est accidenté plus k est grand).

On admettra pour réaliser l'étude expérimentale que la fonction "consommation de carburant", notée f_k, est définie par : pour tout réel x de $[0\,;\,4]$,

$$f_k(x) = k\sqrt{x^2+9} + 4 - x$$

I Étude expérimentale

1. Recherche de la consommation minimale pour $k = 2$
   On cherche dans cette question à savoir en quel point M il faut rejoindre la route, dans le cas où la consommation à travers champ est le double de celle sur la route.
   (a) Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, la représentation graphique de la fonction f_2.

(b) Déterminer graphiquement ou à l'aide d'une table de valeurs un encadrement à 10^{-1} près de la distance HM en kilomètres correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant.

Appeler l'examinateur.

2. Détermination graphique de la valeur limite k_0
Le fermier, qui a un grand sens pratique, pense que si k est inférieur à une certaine valeur limite k_0, il n'est pas utile de rejoindre la route et que couper directement à travers champ n'est pas plus cher ! On cherche à vérifier cette affirmation.
   (a) Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, les représentations graphiques des fonctions f_k pour

$$k \in \{1,1\ ;\ 1,2\ ;\ 1,3\ ;\ 1,4\ ;\ 1,5\ ;\ 1,6\ ;\ 1,7\ ;\ 1,8\ ;\ 1,9\ ;\ 2\}$$

Appeler l'examinateur pour vérification des courbes.

   (b) Calculer $f_k(4)$ et interpréter cette valeur dans le cadre du problème.
   (c) Observer, expliquer et conjecturer la valeur k_0 au-dessous de laquelle il est inutile de chercher à rejoindre la route.

II Détermination de la fonction "consommation"

1. Exprimer CM en fonction de x
2. Démontrer que, pour tout réel x de $[0\ ;\ 4]$ $\quad f_k(x) = k\sqrt{x^2+9} + 4 - x$

Production demandée

- Partie I.
  - 1.(b) Donner la valeur de la distance, en kilomètres, correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant.
  - 2.(b) et 2.(c) Donner la valeur exacte de $f_k(4)$, interprétation. Donner la valeur expérimentale de k_0 et expliquer.
- Partie II.
  - Rédaction des justifications demandées.