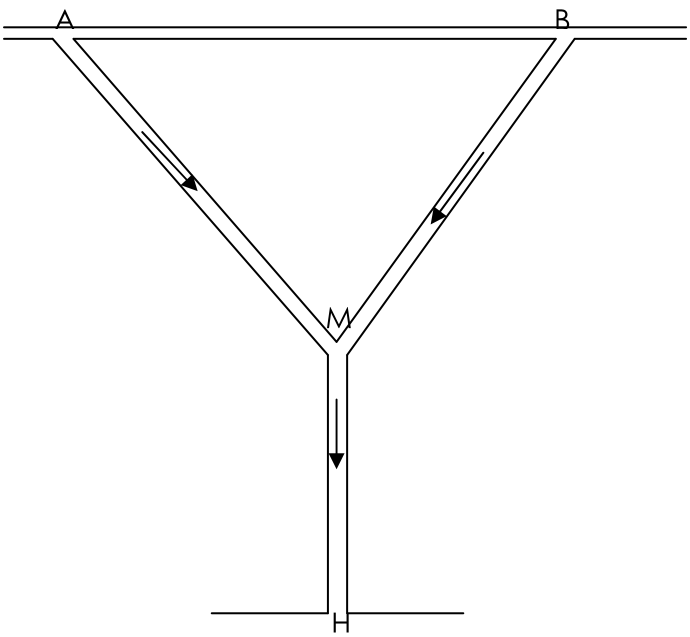
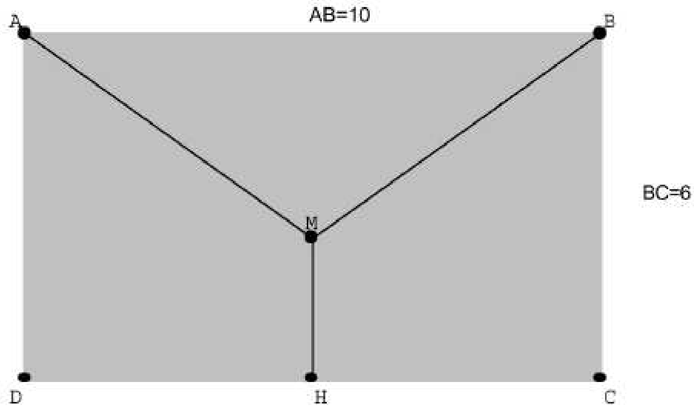
Optimisation d'une longueur.

La figure ci-dessous est un schéma d'un système d'écoulement des eaux :



On le schématise par la figure suivante, où les distances sont exprimées en mètres :



Sur ce plan :
- $[AM]$ et $[BM]$ représentent les deux premiers tuyaux
- $[MH]$ représente le troisième tuyau
- (MH) est la médiatrice de $[DC]$.

On souhaite trouver la position du point M sur la façade de cette maison qui permet de minimiser la longueur des tuyaux à acheter et donc la dépense à effectuer.

On note Q le projeté orthogonal de M sur (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu $\widehat{BMQ} = \theta$.

Travail demandé :

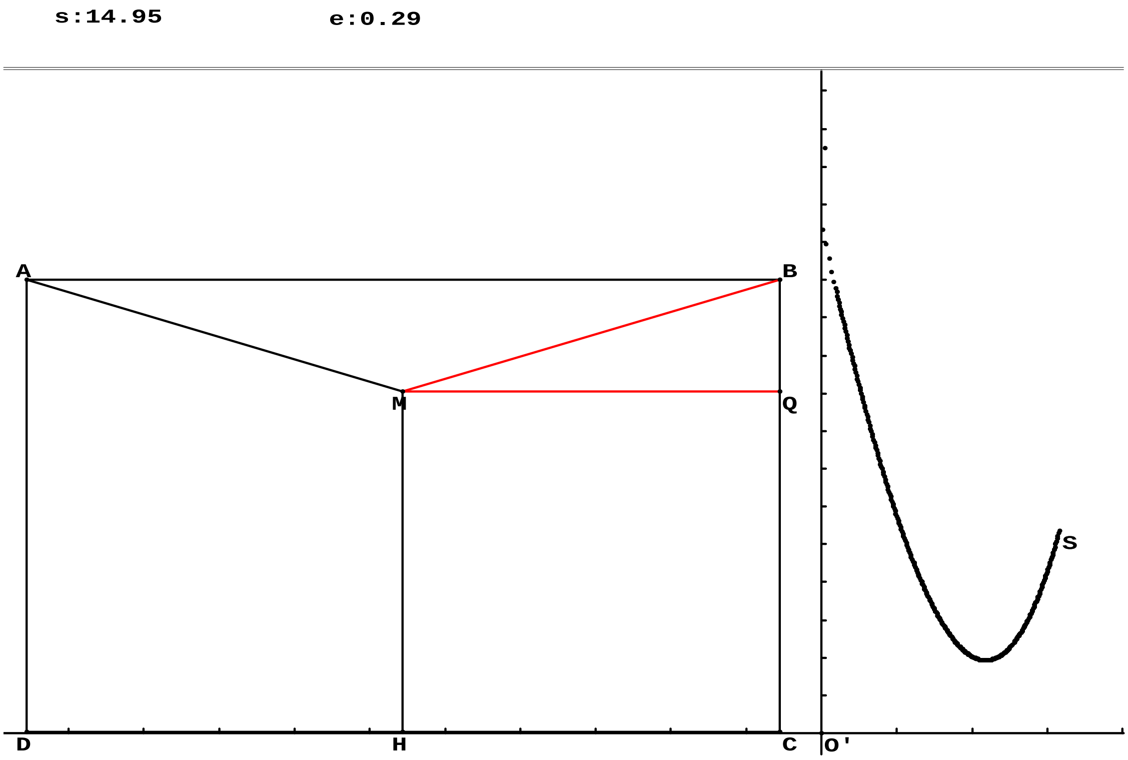
1. A l'aide du logiciel Géoplan, ouvrir la figure « Optimisation.g2w ».
   Elle comprend le repère de base ainsi qu'un second repère de centre O'.

   Construire le rectangle ABCD, puis définir la médiatrice de [DC] ainsi que le point libre M sur cette droite.

   Définir la variable numérique s égale à la somme MA + MB + MH ainsi que e égale à la valeur en radian de l'angle BMQ, puis l'affichage de ces deux valeurs.

   (Facultatif) : Représenter dans le repère d'origine O' le point S d'abscisse e en choisissant des coordonnées adaptées.

Une possibilité de représentation est donnée par la figure ci-dessous :



A l'aide de la figure ainsi conçue, déterminer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BMQ}$ en radian qui donne une somme S minimale, ainsi que la valeur approchée de cette somme

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction et des réponses trouvées.

2. On définit la fonction $g : \theta \to g(\theta) = 2MA + MH$ sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.

   (a) On note g' la fonction dérivée de g. Démontrer que $g'(\theta) = 5 \times \dfrac{2\sin\theta - 1}{(cos\theta)^2}$.

   (b) Déterminer la valeur exacte de θ qui minimise la longueur des tuyaux.

Production demandée

- Les réponses attendues dans la question 1.
- Les démonstrations attendues dans la question 2.