Suites définies conjointement

Énoncé

Soit a un nombre réel non nul. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_0 = a \quad \text{et} \quad V_0 = -\frac{3}{4}a$$
$$U_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n + 4V_n) \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{1}{5}(3U_n + 2V_n)$$

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, calculer et représenter graphiquement les 30 premiers termes de chacune de ces suites pour diverses valeurs du réel a.
   (b) Émettre une conjecture sur la limite de la suite (U_n). Cette limite dépend-elle de la valeur du réel a ?
   (c) Mêmes questions pour la suite (V_n).

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

2. Il s'agit maintenant de conjecturer la possibilité pour la suite (U_n) d'être arithmétique ou géométrique.
   (a) Adapter la feuille de calcul pour aider à effectuer une conjecture sur la nature de (U_n).
   (b) Procéder de même pour conjecturer la nature de la suite (V_n).
   (c) On considère la suite (W_n) définie par $W_n = 3U_n + 4V_n$. Adapter la feuille de calcul précédente pour conjecturer une propriété de la suite (W_n).

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie les conjectures sur la nature de chaque suite.
   Lui indiquer comment il est possible de démontrer la conjecture relative à la suite W_n.

Partie B

3. (a) Démontrer la conjecture relative à la suite (W_n).
   (b) En déduire U_{n+1} en fonction de U_n puis la limite de la suite (U_n).

Production demandée

– La feuille ou le procédé de calcul construit permettant les conjectures des questions 1. et 2.
– La démonstration de la question 3.(b).
