

## Suites et fonctions

### Énoncé

Soit  $n$  un entier naturel,  $n \geq 1$ . On considère les fonctions  $f_n$  définies sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f_n(x) = \frac{e}{n} - 1 + xe^{1-x}$$

#### Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, conjecturer, suivant les valeurs de  $n$  :
  - (a) les variations de  $f_n$ .
  - (b) le nombre de solutions de l'équation  $f_n(x) = 0$ .
2. On note  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  les deux solutions, lorsqu'elles existent, de l'équation  $f_n(x) = 0$  telles que  $\alpha_n < \beta_n$ .
  - (a) Conjecturer, pour tout  $x \geq 0$ , une inégalité entre  $f_{n+1}(x)$  et  $f_n(x)$ .
  - (b) Quelle conjecture peut-on alors formuler à propos du sens de variation des suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$ , et de leur convergence éventuelle ?
  - (c) Quelle propriété semblent vérifier les suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  ?

Appeler l'examineur pour lui montrer le travail réalisé sur le logiciel et pour vérifier les conjectures formulées.

#### Partie B

3. (a) Démontrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet, à partir d'une certaine valeur de  $n$ , deux solutions distinctes  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  dans des intervalles que l'on précisera.

Appeler l'examineur pour vérification.

- (b) Démontrer que les suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  sont de monotonies contraires.

Appeler l'examineur pour vérification.

- (c) Que peut-on en déduire ?

Appeler l'examineur pour vérification.

### Production demandée

- Les différentes conjectures.
- Les démonstrations détaillées des questions 3 (a) et 3 (b).