

Un ensemble de points du plan construit à l'aide de deux suites

Énoncé

On construit deux suites (x_n) et (y_n) de la manière suivante :

Initialisation : $x_0 = 10, y_0 = 0$

Récurrence : pour tout entier naturel n ,
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point M_n de coordonnées (x_n, y_n) . L'objectif est d'observer et d'étudier le nuage des points M_n obtenus, à l'aide d'un logiciel adapté.

Partie A

- Placer dans un repère orthonormal adapté les points M_k pour k compris entre 0 et 30.

Appeler l'examineur pour qu'il vérifie la figure.

- Une transformation du plan envoie M_0 sur M_1 , M_1 sur M_2 et en général M_k sur M_{k+1} . Formuler une conjecture relative à la nature de cette transformation. En admettant que cette conjecture est vérifiée, essayer de préciser **au moins deux** des caractéristiques de cette transformation à partir de la figure affichée.

Appeler l'examineur pour lui proposer la conjecture et certains détails concernant cette transformation.

Partie B

- On note z_n l'affixe du point M_n .

En établissant une relation entre z_{n+1} et z_n de la forme $z_{n+1} = a.z_n$, démontrer les conjectures précédentes. On pourra chercher le module et l'argument de a^2 .

Production demandée

- Réalisation de la figure demandée à l'aide du logiciel.
- Démonstration des conjectures relatives à la transformation.