Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels

Énoncé

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, calculer $U_1, U_2, \cdots, U_{30}$.
2. Déterminer les listes des restes de la division de U_n par 2 ; par 3 ; par 7 et par 13.

   (a) Quelles conjectures peut-on en tirer ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

   (b) À quelle(s) condition(s) sur n, le nombre U_n semble-t-il être divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

Partie B

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, 7 divise $3^n - 1$.

   Appeler l'examinateur pour vérification

4. À l'aide de la question précédente, démontrer la conjecture émise pour 7.
5. Dans le cas où U_n est divisible par 7, U_n est-il divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

Production demandée

– Les différentes conjectures.
– La démonstration de la question 4 .
