

Limites d'intégrales

Énoncé

Pour un entier naturel n non nul, on considère le nombre I_n défini par l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

On cherche à déterminer la limite éventuelle de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie A

- À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la courbe représentative de la fonction

$$f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

- Faire varier n . Quand n devient très grand, quelle est l'allure de la courbe représentative de f_n ?
- Essayer alors de conjecturer une valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Appeler l'examineur pour présenter la conjecture.

Partie B

- Calculer une primitive de f_n sur $[0; 1]$ et en déduire la valeur exacte de I_n .

Appeler l'examineur pour une vérification.

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

- En déduire la valeur exacte de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
-

Production demandée

- Les représentations graphiques de la question 1.
 - La rédaction des questions 5. et 6.
-