Étude d'un ensemble de points

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ qui permet une assimilation à l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on définit le nombre complexe $f(z) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

On pose $a_0 = 4 + 2\mathrm{i}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, et on note A_n le point d'affixe a_n dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, calculer a_n pour n variant de 1 à 30.

   (b) Représenter le nuage des points A_n pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les calculs et le graphique réalisés.

2. Soit J le point d'affixe i. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $d_n = JA_n$.

   (a) Calculer d_n pour n variant de 1 à 30.

   (b) Représenter le nuage des points de coordonnées (n, d_n) pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

   (c) Conjecturer la nature de la suite (d_n).

   Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé.
   Lui proposer des conjectures relatives à la suite (d_n).

Partie B

3. (a) Soit S la transformation du plan, d'écriture complexe $z' = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.
   Préciser la nature de S et déterminer ses éléments géométriques caractéristiques.

   (b) Déterminer la nature de la suite (d_n). Étudier sa convergence.

   (c) Interpréter les observations faites sur les points A_n représentés dans la question 1.(b).

Production demandée

– Affichage à l'écran des calculs et du graphique.
– Réponses argumentées pour la question 3.
