Une propriété des diviseurs de certains entiers

Énoncé

On dit qu'un entier naturel non nul N est *en division harmonique* si le quotient du nombre de diviseurs de N par la somme des inverses des diviseurs de N est un entier (c'est-à-dire, que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :

- 6 admet **4** diviseurs qui sont 1 ; 2 ; 3 et 6 ;
- la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\mathbf{2}$;
- le quotient $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}=2$ est un entier ;
- 6 est donc en division harmonique.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, dire si les nombres 32 et 140 sont en division harmonique.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

2. Pour tout entier n non nul on pose $q_n = 2^{n+1} - 1$ et $\alpha_n = 2^n q_n$.

   (a) Déterminer à l'aide du logiciel les quatre (ou cinq si possible) premières valeurs de n pour lesquelles q_n est un nombre premier.

   (b) Pour chacune des valeurs trouvées, calculer le nombre de diviseurs de α_n et la somme des inverses des diviseurs de α_n. Que peut-on conjecturer ?

   Appeler l'examinateur pour vérification

Partie B

3. Soit p un nombre premier.
   Montrer que p n'est pas en division harmonique.
4. On suppose que $q_n = 2^{n+1} - 1$ est premier.

   (a) Donner la liste des diviseurs de α_n en fonction de q_n.

   (b) Que peut-on conclure si la somme des inverses des diviseurs de α_n vaut 2 ?

   (c) Montrer que la situation précédente est vérifiée.

Production demandée

– Questions 3 et 4.
