

## Suites, approximation d'un réel

### Énoncé

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par  $a_0 = 9$  et, pour tout entier  $n \geq 0$  :

$$b_n = \frac{25}{a_n^2} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$$

On se propose d'étudier la monotonie et la limite de chacune de ces deux suites.

#### Partie A

1. Sur un tableur, créer trois colonnes donnant les valeurs de  $n$ , de  $a_n$  et de  $b_n$ , pour  $n$  entier variant de 0 à 20.
2. En observant les résultats obtenus sur le tableur, conjecturer, pour chacune des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , la monotonie et une valeur approchée de la limite à  $10^{-6}$  près.

Appeler l'examineur pour lui présenter les tableaux et les conjectures.

3. On considère la suite  $(c_n)$  définie, pour tout entier  $n \geq 0$ , par  $c_n = a_n^3$ .  
Créer une nouvelle colonne du tableur pour calculer les termes  $c_n$ , pour  $n$  variant de 0 à 20.  
Émettre alors une conjecture sur la valeur exacte de la limite de la suite  $(a_n)$ .
4. Conjecturer de même la valeur exacte de la limite de la suite  $(b_n)$ .

Appeler l'examineur

#### Partie B

5. On admet que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $b_n^3 \leq 25 \leq a_n^3$ .

Après avoir vérifié que, pour tout entier  $n \geq 0$ , on a  $a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3}$ , démontrer les résultats conjecturés à la question 2. sur la monotonie des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

Appeler l'examineur pour lui présenter le schéma de la démonstration.

6. Citer les théorèmes qui permettent de conclure que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes.

Appeler l'examineur pour lui donner la réponse attendue.

7. On désigne par  $\ell$  et  $\ell'$  les limites respectives des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

En utilisant les relations qui définissent ces deux suites, démontrer les résultats conjecturés aux questions 3. et 4. sur les valeurs exactes des réels  $\ell$  et  $\ell'$ .

Appeler l'examineur

### Production demandée

- Obtention à l'écran des termes  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ , pour  $n$  entier variant de 0 à 20.
- Conjecture sur les valeurs exactes des limites des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .
- Démarches et réponses argumentées aux questions 5. et 7.