

Intersection de tangentes

Énoncé

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbf{R} par :

$$f(x) = \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f et \mathcal{C}_g la courbe représentative de g .

Pour tout réel a , on note :

- A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a et T_A la tangente à \mathcal{C}_f au point A,
- B le point de \mathcal{C}_g d'abscisse a et T_B la tangente à \mathcal{C}_g au point B,
- M $(x_M ; y_M)$ le point d'intersection des tangentes T_A et T_B .

On souhaite étudier le lieu géométrique \mathcal{L} du point M lorsque a varie dans \mathbf{R} .

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- (a) Construire les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ainsi que les tangentes T_A et T_B .
- (b) Construire le point M.

Appeler l'examineur pour valider la figure, ou en cas de difficultés.

- (c) En observant la situation obtenue avec plusieurs valeurs de a , dire quelle relation semble exister entre les réels a et x_M .

Appeler l'examineur pour valider la conjecture.

2. Tracer le lieu \mathcal{L} du point M. Ce point semble appartenir à la courbe représentative \mathcal{L} d'une fonction connue, quelle est cette fonction ? Comment peut-on vérifier cette conjecture ?

Appeler l'examineur pour valider la conjecture.

Partie B

3. Démontrer que \mathcal{L} fait effectivement partie de \mathcal{L} . Que dire de plus ?

Production demandée

- Courbes demandées aux questions 1 et 2.
- Réponse à la question 3.