Suite définie par une sommation

Énoncé

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. À l'aide d'un outil adapté, calculer les 500 premiers termes de la suite (v_n).
   Quelle conjecture peut-on faire concernant la convergence de cette suite ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture.

2. Rechercher, dans les deux cas suivants, à l'aide de l'outil choisi, un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :
   (a) $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-3}$;
   (b) $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-5}$.

   Comment interpréter ces résultats au regard de la conjecture émise à la question 1 ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des résultats et de l'interprétation.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $x_n = v_n + \dfrac{1}{n}$.
   À l'aide de l'outil choisi, calculer les 500 premiers termes de la suite (x_n) puis représenter graphiquement les suites (v_n) et (x_n).
   Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ces deux suites ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture et pour proposer une démarche pour la question 4.

4. (a) Démontrer la conjecture émise à la question 3.
   (b) Conclure sur la convergence de la suite (v_n).

Production demandée

– Obtention des 500 premières valeurs des suites (v_n) et (x_n), ainsi que la représentation graphique de ces valeurs.
– Obtention des valeurs de n_0 à la question 2.
– Réponses argumentées pour la question 4.
